Exkurs: Dynamische Optimierung

Kapitel 4

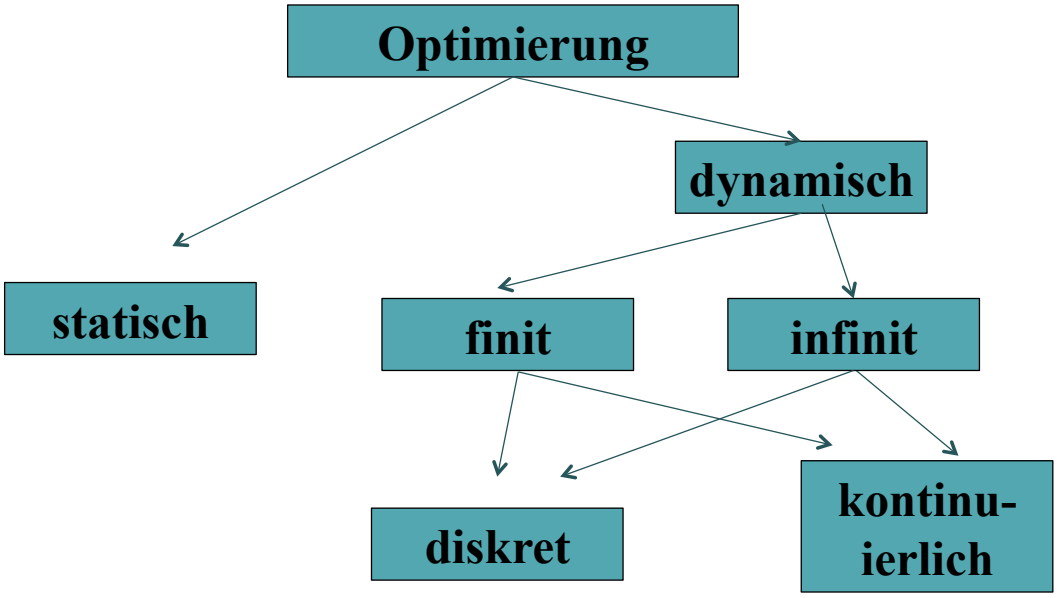
Literatur Optimierung

Mathematical Methods and Models for Economists, Angel de la Fuente, Cambridge University Press – Bibliothekssignatur: QH 000FUE – Seite 549 – 580

R. Barro, X. Sala-i-Martin, Economic Growth, (deutsche und englische Ausgabe) Bibliothekssignatur: QC 340 BAR– Seite 580 ff

Skript: http://agecon2.tamu.edu/people/faculty/woodward-richard/637/notes/default.htm

1 Einführung Optimierung



1 Einführung Optimierung

Bei der **statischen Optimierung** wird ein Vektor an Kontrollvariablen so gewählt, dass der Funktionswert einer Zielfunktion maximal wird und gegebenen Nebenbedingungen erfüllt beleiben.

Bei der **dynamischen Optimierung – in diskreter Zeit -** wird eine „Sequenz“ solcher Entscheidungen gesucht, wobei jeweils zwei Zeitschritte über sog. Zustandsvariablem „verbunden“ sind.

2 Optimierung in diskreter Zeit

- Ökonomisches System, dass in einzelne Zeitschritte zerlegt werden kann
  - Z.B. jährliche Investitionsentscheidungen
  - Spar- und Konsumentscheidungen eines Haushalts
- Die Zielfunktion ist eine Summe
- Kontrollvariablen werden durch einen Akteur so bestimmt, dass die Zielfunktion maximiert wird
- Das System besteht aus Zustandsvariablen und Kontrollvariablen

2.1 Begrifflichkeiten

- **Kontrollvariablen** – decision variables – können durch den Entscheider bestimmt werden $u_s \in \mathbb{R}^n$
  - Z.B. Konsumentscheidung, Sparentscheidung

- **Zustandsvariablem** – state variables oder stocks – werden durch die Wahl der Kontrollvariablen bestimmt
  - Z.B. Sparbuchhöhe, Kapitalbestand $x_s \in \mathbb{R}^n$

- Zur Vereinfachung ist unterstellt, dass x in s=0 gegeben ist
- **Nebenbedingungen** werden zur Vereinfachung als $(x_s, u_s) \in C_s$ beschrieben

2.2 Law of Motion

Law of motion: Funktion, die die Veränderung der Zustandsvariable in der Zeit definiert

$$x_{s+1} = m_s(x_s, u_s)$$

2.3 Zielfunktion

Zielfunktion – objective function – bestimmt den outcome einer Entscheidung in einer Zeitperiode s

- Z.B. Nutzen, Gewinn

$$f_s(x_s, u_s)$$

Die Summe aller Zielfunktionswerte ist zu maximieren

$$W_t = \sum_{s=t}^{T} f_s(x_s, u_s) \qquad \textbf{(2)}$$

2.4 Lösungsverfahren

Ist der Anfangszustand des Systems mit x_t gegeben und eine Sequenz der Kontrollvariablen

$$\overline{u}_{t,T-1} = \{u_s; s = t, t+1, ..., T-1\}$$

So ist die Veränderung des Vektors der Zustandsvariablen x durch das law of motion gegeben

Der Anfangszustand x_t und die Sequenz $\overline{u}_{t,T-1}$ bestimmen damit die Sequenz der Zustandsvariablen über die Zeit

$$\overline{x}_{t+1,T} = \{x_s; s = t, t+1, ..., T\}$$

2.4 Lösungsverfahren

Mit $\overline{z}_{t,T} = \{\overline{u}_{t,T-1} \cup \overline{x}_{t+1,T}\}$ wird die Menge bezeichnet, die aus den Sequenzen der Zustands- und Kontrollgrößen bestehen, die zulässig sind (Nebenbedingungen in jedem Zeitpunkt erfüllen und den Endzustand der x_T erfüllen)

Es gibt unendliche viele Sequenzen $\overline{z}_{t,T}$!

Die Zielfunktion (2) kann dann geschrieben werden als:

$$W(\overline{z}_{t,T}, t, T-1) = \sum_{s=t}^{T} f_s(x_s, u_s) \qquad \textbf{(2')}$$

2.4.1 Value Function

Die **Value Function** ist identisch mit der Zielfunktion berechnet auf ihrem optimalen Kontrollpfad

$$V(x_t,t;x_T,T)=\max_{\bar{u}_{t,T-1}}\{W\left[\bar{z}(\bar{u}_{t,T-1},x_t,x_T,t+1,T-1\right]$$
$$=\sum_{s=t}^{T-1}f_s(x_s,u_s)\quad \text{s.t. } x_{s+1}=m_s(x_s,u_s)$$
$$(x_s,u_s)\in C_s\subseteq\mathbb{R}^{n+m}\forall s\}$$

Vergleiche A.de la Fuente S.550!

Ist das Problem endlich, kann es prinzipiell über Lagrange gelöst werden

2.5 Herleitung der Bellman Gleichung
2.5.1 Time Consistency

Wenn $\bar{z}_{t,T}=\left\{\bar{u}_{t,T-1},x_t,x_T\right\}$ eine zulässige Sequenz von Kontrollvariablen und Endpunkten des Zustandsvektors und mit a, b zwei positive Zeitpunkte gegeben sind, die in $t\le a<b\le T-1$ liegen, kann die return function W formuliert werden als:

$$W(\bar{z}_{t,T},T-1)=W(\bar{z}_{t,T}\Big|_t^{a-1},t,a-1)+$$
$$W(\bar{z}_{t,T}\Big|_a^{b-1},a,b-1)+W(\bar{z}_{t,T}\Big|_b^{T-1},b,T-1)$$

2.5.1 Time Consistency

$$V(x_a^*, a; x_b^*, b) = \max_{\bar{u}_{a,b-1}} \{ W(\bar{z}_{a,b-1}, a, b-1) = \sum_{s=a}^{b-1} f_s(x_s, u_s)$$

$$\text{s.t. } x_{s+1} = m_s(x_s, u_s)$$

$$a, b, x_a^*, x_b^* \text{ gegeben,}$$

$$(x_s, u_s) \in C_s \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \forall s \}$$

Jede Zeitspanne eines optimalen Plans ist ebenfalls optimal, gegeben die Anfangs und Endbedingungen des Zustandsvektors.

2.5 Herleitung der Belman Gleichung

$$V(x_t, t; x_T, T) = \max_{\bar{u}_{t,T-1}} \{ W \left[\bar{z}(\bar{u}_{t,T-1}, x_t, x_{T),t,T-1} \right]$$

$$= \max_{u_t, \bar{u}_{t+1,T-1}} \{ f_t(u_t, x_t) + W \left[\bar{z}(\bar{u}_{t+1,T-1}, x_t, x_T), t+1, T-1 \right] \}$$

Zerlegung der Value Function in eine „heutige“ Entscheidung und eine Entscheidung für alle zukünftigen .

$$= \max_{u_t} \{ f_t(u_t, x_t) + \max_{u_t, \bar{u}_{t+1,T-1}} \{ \left[\bar{z}(\bar{u}_{t+1,T-1}, x_t, x_T), t+1, T-1 \right] \}$$

$$\text{s.t. } x_{t+1} = m_t(x_t, u_t) \}$$

2.5 Herleitung der Bellman Gleichung

Bellmann-Gleichung:

$$V(x_t, t; x_T, T) =$$

$$\max_{\overline{u}_{t,T-1}} \left\{ f_t(u_t, x_t) + V(x_{t+1}, t+1; x_T, T) \text{ s.t. } x_{t+1} = m_t(x_t, u_t) \right\}$$

„An **optimal policy** has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.“– Bellman, 1957

2.5.2 Policy Function

Die **Policy Function** gibt die optimale Wahl der Kontrollvariable in Abhängigkeit von der Zustandsvariable an. $g_t(x_t)$

Die Policy Function gibt für den „heutigen“ Zeitpunkt den optimalen Wert der Kontrollvariable mit u_t^* an.

Damit ist der Wert der Zustandsvariable für den „morgigen“ Zeitpunkt mit $x_{t+1} = m_t[g_t(x_t), x_t]$ bestimmt.

2.5.3 Lösungsalgorithmus endliche Zeit

Die Lösung beginnt mit der „letzten“ Zeitperiode:

$$V(x_{T-1}, T-1) =$$

$$\max_{u_{T-1}} \left\{ f_{T-1}(u_{T-1}, x_{T-1}) \text{ s.t. } m_{T-1}(x_{T-1}, u_{T-1}) = x_T \text{ gegeben} \right\}$$

Es befindet sich hier keine unbekannte Value Function in dem Maximierungsoperator!

Ist $V(x_{T-1}, T-1)$ gelöst, so wird der „vorletzte“ Zeitschritt berechnet:

$$V(x_{T-2}, T-2) = \max_{u_{T-2}} \left\{ f_{T-2}(u_{T-2}, x_{T-2}) + V(x_{T-1}, T-1) \right.$$
$$\left. \text{s.t. } x_{T-1} = m_{T-2}(x_{T-2}, u_{T-2}) \right\}$$

3 Optimal Control

Im Folgenden werden die Lösungsbedingungen für die dynamische Optimierung in kontinuierlicher Zeit vorgestellt.

Diese werden als die Maximum Prinzipien nach Pontryagin bezeichnet.

Die Lösung der Optimierung in kontinuierlicher Zeit ist eine sogenannte **Trajektorie** $u(t)$ der Kontrollvariable u und keine Sequenz $\{u_t\}_{t=0}^{T}$ von Einzelwerten.

$u(t)$ ist eine Funktion der Zeit

3 Optimal Control

Die Bewegungsgleichung (Law of Motion) der Zustandsvariable(n) erzeugt nun ebenfalls keine Sequenz von Einzelwerten in der Zeit sondern eine Funktion der Zustandsvariable in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\dot{x}_t = m(u, x, t)$$

3 Optimal Control

Formulierung des Optimierungsproblem in kontinuierlicher Zeit

$$V(x_0, 0) = \max_{u(t), 0 \le t \le T} \left\{ W_0(u(t)\Big|_{t=0}^{T}, x(t)\Big|_{t=0}^{T}) \right.$$

$$= \int_0^T \alpha(t) F[u(t), x(t), t]\, dt + \alpha(T) S[x(T)]$$

$$\text{s.t. } x(0) = x_0 \quad \text{gegeben},$$

$$\left. \dot{x}(t) = m[u(t), x(t), t] \right\}$$

mit $\alpha(t)$ wird eine Diskontierungsfunktion dargestellt

$S(T)$ ist eine salvage oder scrap Funktion die es ermöglicht, bestimmte Endwerte in in die Zielfunktion zu integrieren (z.B. Verschrottung des Kapitalbestandes in T verursacht Aufwand)

3.1 Lösung finiter Zeithorizont

Der Planer entscheidet über einen Strom an u (Kontrollvariable).

Die hat einen direkten, sofortigen Einfluss auf den Zielfunktionswert F() und einen indirekten Einfluss über die Änderung der Zustandsvariable x.

„Clearly, a control chosen to maximize just the current return is unlikely to be optimal. We need some way to take into account the effects of current decision on future opportunities.“ (Angel de la Fuente S. 567)

3.1.1 Hamilton-Funktion

Die Current-Value Hamilton-Funktion setzt sich aus der Zielfunktion F() und dem Wert der Veränderung der Zustandsvariablen zusammen.

Es werden multipliers q_t eingeführt, diese sind als Preise der Zustandsvariable zu interpretieren.

$$H_t = H(u_t, x_t, q_t, t) = F_t(u_t, x_t) + q_t m_t(u_t, x_t) = F_t() + q_t \dot{x}$$

3.1.1 Hamilton-Funktion

„Thus, we can think of H^c as the sum of the immediate payoff from (x,u) plus the value of the future gains to accure from th ‚investment in the future' represented by the change in the state variable."" (Angel de la Fuente S. 568)

Schattenpreise: q_t

Die Hamilton-Funktion erfasst für einen gegebenen Wert des Schattenpreises den gesamten Beitrag einer Wahl u zum Zielfunktionswert.

3.1.2 Maximum Bedingungen nach Pontryagin

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer optimalen Trajektorie

1. $\max_u \; \mathrm{H}(u,x,q,t) \quad \forall \; t \in [0,T]$

2. $\dfrac{\partial H}{\partial u} = -\dot{q} = \dfrac{\partial q}{\partial t}$

3. $\dfrac{\partial H}{\partial x} = \dot{q}$

4. Transversalitätsbedingungen vgl. 3.1.3

3.1.3 Transversalitätsbedingung

Die Transversalitätsbedingung trifft Aussagen zu den Zustandsgrößen in der Periode T.

Bei endlichem Planungshorizont wird zumeist gefordert, dass

$$q(T)x(T) = 0 \qquad q(T) \geq 0$$

gilt. Entweder ist dann x Null oder der Preis für x (Schattenpreis q) ist Null.

Bei unendlichem Planungshorizont $T = \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) q_t x_t = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} \alpha(t) q_t \geq 0$$

3.2 Numerische Optimierung

Für die Analyse numerischer Probleme kann eine Approximation durch entsprechende Software erfolgen:

GAMS – General Algebraik Modeling Systme
Mathematica
R
Matlab

...

Begriffe zu Kapitel 4

Bellman Gleichung

Hamilton-Funktion

Kontrollvariable

Low of Motion

Nebenbedingung

Optimal Control

Policy Function

Prinzipien nach Pontryagin

Trajektorie

Transversalitätsbedingung

Value Function

Zustandsvariable